B. PORTIER

Le Carré Diabolique de 9

ET SON DÉRIVÉ

Le Carré Satanique de 9

(Carré de base magique aux deux premiers degrés)

TIRÉS DU CARRÉ MAGIQUE DE 3

(NOUVELLE ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE)

There are more things in heaven and earth, Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy.

. . . .

How strange and odd soe'ver I bear myself.

On le peut, je l'essaie ; un plus savant le fasse.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

ALGER
LIBRAIRIE ADOLPHE JOURDAN
IMPRIMEUR-LIBRAIRE-ÉDITEUR
4 PLACE DU GOUVERNEMENT, 4

PARIS
LIBRAIRIE LUCIEN BODIN
43, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 43

1902

B. PORTIER

Le Carré Diabolique de 9

ET SON DÉRIVÉ

Le Carré Satanique de 9

(Carré de base magique aux deux premiers degrés)

TIRÉS DU CARRÉ MAGIQUE DE 3

(NOUVELLE ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE)

There are more things in heaven and earth, Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy.

. . . .

How strange and odd soe'ver I bear myself.

On le peut, je l'essaie; un plus savant le fasse.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

ALGER
LIBRAIRIE ADOLPHE JOURDAN
IMPRIMEUR-LIBRAIRE-ÉDITEUR
4 PLACE DU GOUVERNEMENT, 4

PARIS
LIBRAIRIE LUCIEN BODIN
43, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 43

1902

DU MÊME AUTEUR

LE CARRÉ CABALISTIQUE DE 8

Diabolique au premier degré
Magique aux deux premiers degrés (Satanique)

N. B. — Cette brochure contient une Bibliographie étendue sur les figures magiques.

L'auteur recevra avec reconnaissance l'indication d'ouvrages récents sur les figures magiques, et autres questions de géométrie de situation, échecs, etc.

PRÉFACE

On considère couramment comme de simples amusettes des questions qui renferment plus de théorie qu'elles ne le paraissent à première vue et qui reposent, pour la plupart, sur des propriétés des nombres, peu connues, souvent même énigmatiques.

Des mathématiciens célèbres n'ont cependant pas dédaigné de s'occuper de ces humbles sujets, ni reculé devant la somme considérable de recherches et de travail qu'ils exigent, car pour un savant, une question n'est jamais petite. L'étude de ces problèmes, qui semblent n'être que de vulgaires casse-tête, a souvent révélé des lois ou des théories nouvelles conduisant à des applications utiles ou inattendues.

Il est notoire que les idées les plus simples, quelquefois les plus futiles, même les plus bizarres en apparence, peuvent contenir le germe d'une foule de vérités à peine admissibles tout d'abord et que l'empirisme raisonné conduit parfois à des spéculations de la plus haute portée lorsqu'un grand nombre de faits ont mis sur la voie de la vérité. D'un autre côté, ce n'est que par des essais réitérés que les chercheurs opiniâtres parviennent, les uns après les autres, à déchirer le voile qui recouvre les vérités dont ils n'ont pu longtemps que pressentir l'existence.

Les carrés magiques en offrent un exemple. Branche importante et intéressante de l'arithmétique de situation, ils fournissent, non de simples distractions, mais des données utiles pour la solution de certains problèmes célèbres du domaine des combinaisons et aussi pour diverses industries, celle du tissage par exemple, ainsi que l'ont établi dans leurs ouvrages E. Lucas, le général Frolov, etc.

Nul doute qu'il n'en soit de même pour les cas particuliers qui vont être ici dépouillés de toute considération de mathé-

matique pure et présentés sous une forme aussi pratique que le comporte la matière. Ils n'en sont que plus remarquables, tant par leur simplicité que par le nombre de transformations dont ils sont susceptibles.

« La véritable magie consiste à opérer les choses les plus » surprenantes par les procédés les plus simples. » Or, jusqu'à nos jours, les Diaboliques n'ont été traités qu'imparfaitement au point de vue théorique. Basés cependant sur des propriétés tout élémentaires, bien que peu remarquées du carré magique de 3, le Diabolique de 9, connu depuis peu d'années et son dérivé le Satanique encore plus récent, se construisent tous les deux au moyen de la même formule et obéissent à des lois analogues, ce qui explique leurs dénominations. Ils ne sont au fond que des transformations l'un de l'autre et peuvent être ramenés à un type unique. C'est le but des quelques pages qui suivent et développent les *Constructions nouvelles* de ces carrés parues en mai et octobre 1893, ainsi que le mémoire communiqué la même année à l'*Association Française pour l'Avancement des Sciences* pendant la session du Congrès de Besançon et le *Supplément* publié en juin 1898 — modestes publications honorées d'appréciations flatteuses de la part d'un grand nombre de savants, d'amateurs et de journaux tant de la France que de l'étranger et qui ont permis à plusieurs notabilités de la science d'élargir le domaine si intéressant de la Théorie des nombres.

En réduisant à deux les exemples de Diaboliques donnés dans l'édition précédente aujourd'hui profondément remaniée, l'enchaînement de tous les cas possibles n'en est que plus facile à saisir et augmente considérablement le nombre de solutions. Enfin, un seul exemple de Satanique suffit pour établir toutes les transformations dont ce carré est susceptible tout en justifiant la liaison qui existe entre les deux carrés.

22 mars 1902.

B. PORTIER,

Agha Supérieur, — Mustapha,

Ancien professeur de langues étrangères et de mathématiques à S. Paulo (Brésil)

CARRÉ DIABOLIQUE DE 9

I. — ÉLÉMENTS

Suites aux 3 premiers degrés. — Parmi les 81 premiers entiers consécutifs, il en est qui, par groupes de neuf, jouissent de la propriété de donner pour sommes les constantes aux trois premiers degrés :

1er degré	369	soit 1/9	de la somme	des 81 premiers nombres.		
2e —	20049	—	—	des carrés	—	
3e —	1225449	—	—	des cubes	—	

Il existe un certain nombre de ses *suites* et plusieurs moyens d'en obtenir.

Pour avoir celles qui ont le plus d'applications, surtout pour la détermination des positions essentielles dans les carrés de 9 qui font l'objet de cette étude, il suffit de remplir un carré de neuf cases avec les neuf premiers Multiples de 9 pris dans l'ordre numérique et de prendre les huit orientations du carré magique de 3 :

0	9	18
27	36	45
54	63	72

2 9 4		2 7 6		4 3 8		4 9 2
7 5 3		9 5 1		9 5 1		3 5 7
6 1 8		4 3 8		2 7 6		8 1 6

6 1 8		6 7 2		8 1 6		8 3 4
7 5 3		1 5 9		3 5 7		1 5 9
2 9 4		8 3 4		4 9 2		6 7 2

Additionnant case à case les nombres du premier carré avec ceux de l'un des huit seconds, on obtient chaque fois,

dans l'ordre numérique, les nombres de l'une des huit suites à trois degrés ci-desssous :

2	16	24	36	41	46	58	66	80
2	18	22	34	41	48	60	64	80
4	12	26	36	41	46	56	70	78
4	18	20	30	41	52	62	64	78
6	10	26	34	41	48	56	72	76
6	16	20	28	41	54	62	66	76
8	10	24	30	41	52	58	72	74
8	12	22	28	41	54	60	70	74

Sauf le nombre moyen 41, ces suites ne contiennent que des nombres pairs, je les appelle pour plus de simplicité *suites paires*.

Le même carré des Multiples avec les carrés ne donnant la constante 15 que dans les diagonales

3	6	9	7	4	1
2	5	8	8	5	2
1	4	7	9	6	3

donne les suites impaires :

3	15	27	29	41	53	55	67	79
7	13	19	35	41	47	63	69	75

Un autre procédé, très élémentaire aussi, consiste à remplir les horizontales d'un carré de 81 cellules avec la suite naturelle des 81 premiers nombres entiers consécutifs, disposés ainsi en neuf progressions de trois groupes de trois nombres et de former un nouveau carré en prenant les verticales du premier dans les ordres 294 753 ... 276 951 ... ou 369 etc., indiqués par les positions des nombres du carré de 3.

D'autres moyens donnent une vingtaine d'autres suites, mais qui ne possèdent pas comme les premières les propriétés curieuses qui vont être exposées en recherchant les diverses constructions des Diaboliques et des Sataniques.

Suites aux deux premiers degrés. — En conjuguant le carré des Multiples avec chacun des huit semi-magiques qu'engendre le carré magique de 3, on obtient chaque fois

8	6	1	8	6
4	2	9	4	2
3	7	5	3	7
8	6	1	8	6
4	2	9	4	2

et dans les huit orientations l'une des principales *lignes sataniques* (égalités aux deux premiers degrés : 369 20049).

Exemple : Avec	4	2	9	3	7	5	8	6	1
et	0	9	18	27	36	45	54	63	72
les sommes	4	11	27	30	43	50	62	69	73

donnent les deux constantes.

Il est à noter que ce n'est qu'en opérant sur le carré magique de 3 (5, nombre moyen au centre) que se manifeste la triple égalité.

Des conjugaisons analogues donnent les principales lignes diaboliques qui, on le verra plus loin, servent pour quelques transformations remarquables du Diabolique.

Carré magique de 9 à progressions. — 1. Placer dans le premier compartiment de neuf cases du carré de 81 cellules le carré magique de 3 construit avec la progression de 1 à 9. Dans le deuxième compartiment et en conservant l'orientation, placer le carré magique construit avec la progression de 10 à 18 et ainsi de suite. Prenant alors dans l'ordre naturel des nombres du carré de 3 : 294 753 618, par exemple, les

neuf compartiments ainsi obtenus, on trouve le premier carré ci-dessous, désigné sous le nom de *carré magique à progressions*, constante 369 :

11	18	13	74	81	76	29	36	31
16	14	12	79	77	75	34	32	30
15	10	17	78	73	80	33	28	35
56	63	58	38	45	40	20	27	22
61	59	57	43	41	39	25	23	21
60	55	62	42	37	44	24	19	26
47	54	49	2	9	4	65	72	67
52	50	48	7	5	3	70	68	66
51	46	53	6	1	8	69	64	71

59	6	31	80	27	52	65	12	37
4	32	60	25	53	81	10	38	66
33	58	5	54	79	26	39	64	11
74	21	46	68	15	40	62	9	34
19	47	75	13	41	69	7	35	63
48	73	20	42	67	14	36	61	8
71	18	43	56	3	28	77	24	49
16	44	72	1	29	57	22	50	78
45	70	17	30	55	2	51	76	23

2. En formant les compartiments avec les tronçons des neuf progressions pris dans l'ordre diagonal 147 258 369, par exemple, on a pour le premier 1 2 3 28 29 30 55 56 57. Ces nombres donnent un carré magique où ces groupes sont placés dans l'ordre diagonal. Opérant de même pour les autres compartiments qu'on prendra aussi dans l'ordre naturel 294 753 618, on obtient un deuxième carré à progressions dont la verticale et l'horizontale centrales sont chacune formées de l'une des deux suites impaires et dont les horizontales ou verticales de rang impair donnent des égalités aux deux premiers degrés.

Ces deux carrés tirés de la *suite naturelle* des nombres vont bientôt former immédiatement des Diaboliques et par transpositions de ceux-ci des Sataniques.

Carré magique de 9 à compartiments. — Prenant dans l'ordre naturel des nombres du carré magique de 3, les verticales de l'un ou l'autre des carrés à progressions, on obtient chaque fois un carré magique donnant la constante 369 dans

les neuf compartiments. D'autres moyens amènent ce résultat, mais cette construction présente comme particularités — *a*, l'une des suites paires dans les grandes diagonales — *b*, la possibilité de placer l'un des trois grands Rectangles de trois rangées, 1/3 du carré, à la suite des deux autres, ce qui donne la constante dans six grandes diagonales, propriété désignée sous le nom de *1/3 diabolique* — *c*, la possibilité de placer les trois grands Rectangles de trois rangées dans l'ordre que l'on voudra et aussi les trois rangées dans un ordre quelconque pourvu qu'il soit le même dans les trois Rectangles. Comme conséquence, chacun des 81 nombres employés peut occuper une case déterminée, le centre par exemple. Ces diverses propriétés seront souvent rappelées dans les Diaboliques et les Sataniques, dont elles expliquent des transformations particulières.

II. — CONSTRUCTIONS

Le carré *Diabolique*, appelé aussi *Résilien, à Roulette, Cylindrique,* présente la constante dans toutes les rangées et toutes les diagonales, car on peut placer un nombre quelconque de rangées à la suite des autres et chacun des nombres employés peut occuper une case déterminée. Celui de 9, que d'éminents mathématiciens ont longtemps considéré comme impossible à cause du facteur 3 qui entre dans sa racine, peut se construire d'après les indications publiées dans la *France* (10 et 24 décembre 1888) et il existe un grand nombre de moyens trés élémentaires de satisfaire en quelques lignes aux conditions du problème, tout en réduisant considérablement les calculs.

C'est là le cas paraissant à première vue le plus simple, puisque c'est la définition générale de tous les Diaboliques. Cependant il est tout à fait inutile de s'occuper de cette forme, car, là ne se bornent pas les manifestations de la diabolie dans le module 9. En effet, la constante 369 peut se présenter non-seulement dans les dix-huit rangées et les dix-huit diagonales mais dans d'autres positions faciles à reconnaître.

Ainsi que je l'ai fait remarquer dans les premières recherches sur le Diabolique de 9, celui-ci peut se construire aisément avec la constante dans les 81 compartiments de neuf cases qu'il est possible de trouver dans tout le réseau, en y promenant une *grille* de la grandeur d'un compartiment. Cette propriété entraîne beaucoup d'autres positions de la constante et, de cette forme, qu'on peut appeler *Diabolique à grille*, dérive, non par tronsformation, mais plutôt par déformation, la forme simple qui n'est mentionnée plus haut que pour mémoire et qui sera traitée plus loin.

Outre la propriété d'être évidemment 1/3 diabolique, le Diabolique à grille offre celle de permettre, comme dans les carrés à compartiments, de placer 1° les trois Rectangles de trois rangées dans l'ordre que l'on voudra et 2° les trois rangées dans un ordre quelconque pourvu qu'il soit le même les trois Rectangles. Ces particularités qui n'avaient pas encore été remarquées conduisent à une grande variété de transpositions des neuf compartiments fondamentaux et des groupes de trois nombres dont ils se composent, en même temps qu'elles expliquent la plupart des transformations diaboliques dont est susceptible cette forme plus complète.

Il paraît avoir été connu avant le Diabolique ne présentant pas ces propriétés : un exemple en a été donné dans le *Siècle* du 23 juin 1888, mais sans signaler la grille.

Je me propose d'en présenter quelques constructions, différentes, quasi empiriques, il est vrai, mais rappelant par leur simplicité réellement magique, celles du carré ordinaire de 9 que l'on trouve dans tous les traités un peu étendus sur les carrés magiques et dont elles ne sont au fond que des cas particuliers révélant des propriétés remarquables du modeste carré de 3. La connaissance de cette simple donnée conduit à des résultats hérissés à première vue de difficultés insurmontables.

I. — Prendre les verticales du premier carré à progressions dans l'ordre 369 258 147, ordre diagonal des nombres du carré de 3, c'est-à dire en remarquant que les nombres des suites impaires peuvent occuper les Diagonales centrales.

	6	9	2	5	8	1	4	7
13	76	31	18	81	36	11	74	29
12	75	30	14	77	32	16	79	34
17	80	35	10	73	28	15	78	33
58	40	22	63	45	27	56	38	20
57	39	21	59	41	23	61	43	25
62	44	26	55	37	19	60	42	24
49	4	67	54	9	72	47	2	65
48	3	66	50	5	68	52	7	70
53	6	71	46	1	64	51	6	69

Cette transformation constitue l'une des nombreuses *transformations diaboliques*, différentes de celles des carrés magiques ordinaires. On peut aussi opérer dans ce carré à progressions les *transformations diaboliques* suivantes, non des horizontales et des verticales à *égale* distance du centre, mais en prenant les verticales dans l'ordre 147 258 369 et dans le diagramme obtenu les horizontales dans l'ordre 741 852 963 ou

147	258	369	puis	186	753	429
168	357	249		186	753	429
168	357	249		384	951	627
186	753	429		741	852	963
186	753	429		762	951	843
369	258	147		762	159	438
726	159	438		762	951	843
741	852	963		384	951	627

II. — Prendre les verticales du deuxième carré à progressions dans l'ordre 168 357 249 et dans le diagramme les horizontales dans l'ordre 384 951 627.

On peut aussi prendre les ordres suivants :

186	753	429	puis	348	159	267
726	159	483		348	159	267
762	951	843		384	951	627

Il suffit de prendre les verticales du même deuxième carré à progressions dans l'ordre 741 852 963, c'est à-dire de construire l'Horizontale centrale avec les nombres de la deuxième suite impaire dans l'ordre numérique.

Voici à la fois ce Diabolique et son Paradigme, formule dans laquelle les neuf premiers nombres sont représentés par les petites lettres et les neuf premiers Multiples de 9 par les grandes :

65	80	59	12	27	6	37	52	31
10	25	4	38	53	32	66	81	60
39	54	33	64	79	58	11	26	5
62	68	74	9	15	21	34	40	46
7	13	19	35	41	47	63	69	75
36	42	48	61	67	73	8	14	20
77	56	71	24	3	18	49	28	43
22	1	16	50	29	44	78	57	72
51	30	45	76	55	70	23	2	17

Hr	Ky	Gu	Bs	Cz	Av	Ep	Fx	Dt
Bp	Cx	At	Er	Fy	Du	Hs	Kz	Gv
Es	Fz	Dv	Hp	Kx	Gt	Br	Cy	Au
Gy	Hu	Kr	Az	Bv	Cs	Dx	Et	Fp
Ax	Bt	Cp	Dy	Eu	Fr	Gz	Hv	Ks
Dz	Ev	Fs	Gx	Ht	Kp	Ay	Bu	Cr
Ku	Gr	Hy	Cv	As	Bz	Ft	Dp	Ex
Ct	Ap	Bx	Fu	Dr	Ey	Kv	Gs	Hz
Fv	Ds	Ez	Kt	Gp	Hx	Cu	Ar	By

Remarques I. — Un Paradigme est utilisable dans ses huit orientations.

II. — Dans les Paradigmes, les grandes lettres d'une part, les petites de l'autre, suivent un ordre rigoureusement semblable dans les horizontales, les verticales et les diagonales.

Si l'on connaît un compartiment quelconque, il suffit donc de connaître aussi les premières lettres de la première case, par exemple, du compartiment suivant dans le sens horizontal et dans le sens vertical, c'est-à-dire du sixième compartiment α et du huitième β si le compartiment central ou *noyau* est connu.

α première case du sixième compartiment.

β première case du neuvième compartiment.

III. — Les formes de Diaboliques exposées découlent les unes des autres par des transformations diaboliques basées sur l'ordre des nombres du carré de 3. La relation directe entre les deux solutions ci-dessus sera expliquée p. 24.

IV. — Au lieu de se servir des neuf progressions fournies par la suite naturelle des 81 premiers nombres consécutifs placés diagonalement pour construire un carré magique de base impaire d'après la méthode indienne (type Bachet) indiquée dans les traités les plus élémentaires, on peut utiliser la plupart des lignes diaboliques qui sont entre autres les horizontales, les verticales, les diagonales, diverses marches du cavalier aux échecs etc., dans les formes décrites ou simplement indiquées plus haut. Cette construction déforme le Diabolique en ce qu'elle fait disparaître la grille et ne laisse la constante que dans les dix-huit rangées et les dix-huit diagonales ainsi qu'il est dit dans la définition générale.

Valeurs primordiales avec les Paradigmes du Diabolique

p	r	s	t	u	v	x	y	z	A	B	C	D	E	F	G	H	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72
1	4	7	2	5	8	3	6	9	0	27	54	9	36	63	18	45	72
3	2	1	6	5	4	9	8	7	18	9	0	45	36	27	72	63	54
3	6	9	2	5	8	1	4	7	18	45	72	9	36	63	0	27	54

Ces combinaisons peuvent être prises dans l'un ou l'autre sens, tant pour les nombres que pour les Multiples. On

peut évidemment prendre p r s t..... pour les Multiples et A B C D..... pour les nombres.

On remarquera qu'il faut conserver les valeurs absolues :

$$p + u + z = r + u + y = s + u + x = t + u + v = 15$$
$$A + E + K = B + E + H = C + E + G = D + E + F = 108$$

ainsi que les valeurs relatives :

$$p > r > s \quad p > t > x \quad p < r < s \quad p < t < x$$
$$A > B > C \quad A > D > G \quad A < B < C \quad A < D < G$$

en suivant une marche ascendante ou descendante uniforme dans une ligne de trois groupes et choisir les premières lettres de chacun de ceux-ci à égale distance dans la suite naturelle :

p	r	s	t	u	v	x	y	z	A	B	C	D	E	F	G	H	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72

Ce tableau ne contient que des valeurs donnant l'alternance à 82 dans les cases symétriques par rapport au centre ; il pourrait être sensiblement étendu en modifiant uniformément l'ordre des nombres des groupes. Ex. :

1 3 2   7 9 8   4 6 5   1 3 2   7 9 8

et en prenant alors l'un quelconque de ceux-ci comme groupe initial.

De même pour les autres lignes tant des nombres que des Multiples.

CARRÉ SATANIQUE DE 9

constantes 369 20049

Le carré de *base magique aux deux premiers degrés* construit avec les 81 premiers nombres consécutifs, donne les constantes dans les horizontales, les verticales et les deux digonales centrales seulement.

Il est susceptible de transformations toutes particulières, généralement différentes de celles qui ont été indiquées dans le Diabolique. Pour plus de simplicité et à cause d'analogie évidente avec le Diabolique, ainsi qu'on le verra dans quelques lignes, je le désigne sous un nom très voisin, celui de *Satanique*. Il présente parfois l'alternance à 82 dans les cases symétriques par rapport au centre, l'une des suites paires à trois degrés dans chacune des quatre lignes centrales, une aux extrémités des lignes centrales dans le carré de 9 celui de 7 et celui de 5, enfin la huitième dans le compartiment central. (Problème 4618 du *Siècle*, première solution connue). Quelquefois il donne aussi les deux constantes dans les huit autres compartiments, d'autres fois il est 1/3 Diabolique avec les deux constantes dans les quatre autres diagonales. Tous ces accessoires se présentent dans les exemples suivants.

Le Paradigme du Diabolique (p. 12) fournit une solution au moyen des propriétés des suites paires et de leurs positions dans le Satanique. Choisissant, par exemple, la suite

8 10 24 30 ... pour occuper l'Horizontale centrale, il suffira de représenter ces nombres par les valeurs :

p r s	t u v	x y z	A	B	C	D	E	F	G	H	K
6 7 2	1 5 9	8 3 4	0	9	18	27	36	45	54	63	72

qui les traduisent dans le Paradigme du Diabolique.

70	75	59	11	22	9	42	53	28
15	26	1	43	48	32	65	76	63
38	49	36	69	80	55	16	21	5
57	68	79	4	18	20	35	37	51
8	10	24	30	41	52	58	72	74
31	45	47	62	64	78	3	14	25
77	61	66	27	2	13	46	33	44
19	6	17	50	34	39	81	56	67
54	29	40	73	60	71	23	7	12

Ces valeurs appliquées au Paradigme donnent un carré de 9 ne présentant plus la diabolie, mais au lieu de cette propriété apparaissent toutes celles qui peuvent se trouver dans le Satanique. Il conserve même la constante au premier degré dans les neuf compartiments formés dans le même Rectangle horizontal ou vertical. Les suites impaires occupent des positions qui permettent de les placer dans les diagonales, mais elles n'ont pas comme les suites paires la proprieté de rendre sataniques les compartiments.

Cette construction, possible avec le Paradigme du Diabolique montre que tout se réduit à une question de valeurs.

La construction du Diabolique ainsi que les premières recherches pour le transformer en Satanique et conclure à l'UNITÉ des deux carrés ont été communiquées en 1893 à l'*Association Française pour l'Avancement des Sciences*, pendant la session du *Congrès de Besançon*.

Les seules valeurs α et β dans ce Satanique avec le compartiment central obtenu par l'ordre 4 18 20 30.... sont

$\alpha = 35$ avec $\beta = 27$ $\qquad$ $\alpha = 57$ avec $\beta = 11$
$\alpha = 37$ $\quad \beta = 50$ $\qquad$ $\alpha = 79$ $\quad \beta = 69$
$\alpha = 51$ $\quad \beta = 73$ $\qquad$ $\alpha = 68$ $\quad \beta = 43$

L'Horizontale centrale reste fixe.

Transformations sataniques. — 1. Sans toucher à l'Horizontale centrale, la diagonale 70 26 36.... peut occuper la verticale centrale et celle-ci passer dans l'autre diagonale.

28	42	53	59	70	75	9	11	22
65	76	63	15	26	1	43	48	32
21	5	16	49	36	38	80	55	69
79	57	68	20	4	18	51	35	37
8	10	24	30	41	52	58	72	74
45	47	31	64	78	62	14	25	3
13	27	2	44	46	33	66	77	61
50	34	39	81	56	67	19	6	17
60	71	73	7	12	23	29	40	54

22	9	11	53	28	42	75	59	70
43	48	32	65	76	63	15	26	1
55	69	80	5	16	21	36	38	49
68	79	57	18	20	4	37	51	35
8	10	24	30	41	52	58	72	74
47	31	45	78	62	64	25	3	14
33	44	46	61	66	77	2	13	27
81	56	67	19	6	17	50	34	39
12	23	7	40	54	29	71	73	60

Il n'y a qu'à prendre les compartiments dans l'ordre 312 456 897 et à transcrire dans l'ordre primitif les nombres des trois suites. Le compartiment central se trouve rempli. On changera alors les groupes diagonaux des compartiments extérieurs en groupes verticaux en se guidant sur les nombres déjà placés et la marche indiquée par la position des nombres du carré central.

La diagonale 28 76 16.... du carré primitif peut de même remplacer la verticale centrale 22 48 80.... qui passera dans l'autre diagonale.

Les positions possibles de nombres de la suite 8 10 24.... dans l'Horizontale centrale pour le Satanique 1/3 diabolique et à compartiments sataniques avec les mêmes nombres respectivement dans les quatre lignes centrales dérivent toutes de ces trois carrés par des propriétés des carrés magiques de base impaire.

Une même opération sur les huit suites considérées donne donc 24 solutions principales.

2. Dans les trois carrés on peut placer les horizontales des trois Rectangles horizontaux dans l'ordre 231 ou 312 sans toucher aux verticales ; il en est de même des trois Rectangles verticaux, ce qui conduit à quatre solutions.

On peut aussi prendre les ordres 132 213 321 mais en ayant soin d'intervertir ensuite les Rectangles extérieurs.

Ces propriétés donnent 12 transformations et portent à $12 \times 24 = 288$ le nombre des solutions principales.

3. Dans tous les Sataniques ainsi construits, les groupes horizontaux, verticaux ou diagonaux des neuf compartiments donnent pour somme l'un des nombres 42 96 114 120 123 132 150 204. De plus, les groupes donnant 123 donnent aussi une même *somme de carrés* si l'on considère des groupes symétriques complémentaires à 82. Il est donc possible de les échanger pour leurs complémentaires, sans toucher au reste, mais en ayant soin d'intervertir l'ordre des nombres du groupe qui leur correspond dans le carré central. Exemple dans le premier carré :

12 67 44	71 39 13	40 17 66
14 72 37	64 41 18	45 10 68
16 65 42	69 43 11	38 15 70

Des transformations semblables sont possibles avec :

39	49	36	31	45	47	54	29	40	43	48	32	....
59	26	38	11	32	80	53	65	5	68	8	47	....
59	15	49	22	32	69	42	76	5	68	24	31	....

4. Les groupes 42 96 114 120 126 204 sont susceptibles de transformations sataniques analogues. Les groupes 42 :

1	15	26	4	18	20	5	16	21	6	17	19
2	13	27	8	10	24	7	12	23	9	11	22

donnent aussi une double égalité. Recopiant le carré en omettant les groupes 42, on a tous les éléments pour terminer.

70	75	59	17	6	19	42	53	28
15	2	27	43	48	32	65	76	63
38	49	36	69	80	55	12	7	23
57	68	79	24	10	8	35	37	51
20	18	4	30	41	52	58	72	74
31	45	47	62	64	78	25	14	3
77	61	66	1	26	15	46	33	44
9	22	11	50	34	39	81	56	67
54	29	40	73	60	71	5	21	16

De même pour les groupes 96 114 120. Dans ces quatre transformations, le remplacement de chaque nombre par son complémentaire à 82 amène respectivement celles des groupes 204 150 132 126 ce qui porte à 12 le nombre des transformations par groupes symétriques.

Remarques. — I. Certaines transformations simultanées ou non des horizontales et des verticales, ou des échanges de trois nombres seulement donnant une double égalité, détruisent le 1/3 diabolisme ou la double égalité dans les compartiments, tout en conservant, d'après la définition générale, les deux constantes dans les horizontales, les verticales et les deux diagonales centrales.

9	23	28	69	44	66	31	20	79
58	1	25	39	15	71	74	36	50
80	67	65	32	7	19	24	30	45
43	33	21	22	81	29	68	64	8
51	38	72	73	59	34	3	26	13
47	52	77	17	12	42	63	4	55
57	18	40	61	46	5	53	78	11
14	75	35	2	49	27	37	70	60
10	62	6	54	56	76	16	41	48

II. Comme on peut s'en assurer en considérant les trois premiers sataniques, la position des nombres d'une suite, dans l'Horizontale centrale, par exemple, donne trois formes qui correspondent aux trois positions des nombres de la suite occupant le compartiment central.

III. Quelques formes de Sataniques donnent un Diabolique à grille avec les neuf compartiments fondamentaux sataniques. Ainsi, avec le compartiment central occupé par la suite 4 18 20 30... dans l'ordre numérique (premier exemple), il suffit de conserver intact le Rectangle vertical central et de prendre les horizontales des trois compartiments du premier Rectangle vertical dans l'ordre 312 puis celles du troisième Rectangle dans l'ordre 231. La première horizontale sera 38 49 36 11 22 9 65 76 63.

De même avec le Rectangle horizontal central, en prenant les verticales du premier Rectangle horizontal dans l'ordre 231 et celles du troisième dans l'ordre 312.

Ces transformations reviennent à prendre avec le compartiment central choisi ci-dessus $\alpha = 57$ ou 35 avec $\beta = 13$ ou 22 et $\alpha = 58$ ou 31 avec $\beta = 11$ ou 27.

IV. Dans les Diaboliques à grille offrant la particularité de donner les neuf compartiments fondamentaux sataniques, il n'est pas possible d'échanger α pour β parce qu'ils dépendent du dernier Diabolique. Ils se trouvent parmi les formes qui retiennent le plus de propriétés du Satanique et appartiennent au 8e cas traité plus loin (p. 29), le seul qui donne la Satanie dans ces neuf compartiments.

Nombre de Solutions

Chacune des huit formes initiales est susceptible de deux transformations des diagonales centrales en verticales centrales ce qui donne comme solutions principales......... $3 \times 8 = 24$

Les ordres 231 ou 312 des horizontales ou des verticales ainsi que les ordres 132 ou 213 321 portent ce nombre à...... $12 \times 3 \times 8 = 288$

On a de plus les 12 transformations par groupes décrites p. 18, soit .... $13 \times 12 \times 3 \times 8 = 3744$

Et comme chacun des nombre peut occuper une case déterminée on arrive à........ $81 \times 13 \times 12 \times 3 \times 8 = 308264$ solutions toutes 1/3 diaboliques et à compartiments sataniques.

De même que pour le Diabolique à grille, il convient de donner les valeurs qui amènent des formes de Satanique.

En conservant pour les Multiples les mêmes valeurs A B C D... que pour le Diabolique, il faut prendre pour les nombres des valeurs choisies dans l'ordre naturel des nombres du carré de 3.

A	B	C	D	E	F	G	H	K	p	r	s	t	u	v	x	y	z
0	9	18	27	36	45	54	63	72	2	7	6	9	5	1	4	3	8
0	27	54	9	36	63	18	45	72	2	9	4	7	5	3	6	1	8
18	9	0	45	36	27	72	63	54	4	3	8	9	5	1	2	7	6
18	45	72	9	36	63	0	27	54	4	9	2	3	5	7	8	1	6

ou réciproquement :

p	r	s	t	u	v	x	y	z	A	B	C	D	E	F	G	H	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	54	45	72	36	0	27	18	63
1	4	7	2	5	8	3	6	9	9	72	27	54	36	18	45	0	63
3	2	1	6	5	4	9	8	7	27	18	63	72	36	0	9	54	45
3	6	9	2	5	8	1	4	7	27	72	9	18	36	54	63	0	45

Ces valeurs servent dans l'un ou l'autre sens tant pour les nombres que pour les Multiples. Elles donnent des formes de Satanique avec le Paradigme du Diabolique.

Les deux tableaux ci-dessus ne donnent que les valeurs principales et alternantes ; comme pour le Diabolique, il est facile de les étendre.

Tous les moyens exposés pour construire les Diaboliques et les Sataniques 1/3 diaboliques ou non, ne reposent que sur la connaissance du carré de 3 et des propriétés des suites à trois degrés, cependant il est bon de comparer ces résultats avec les considérations mathématiques exposées par M. G. Arnoux, dans son ouvrage l'*Arithmétique graphique.*

Le lecteur trouvera son profit à consulter cette œuvre magistrale, bien que l'auteur se soit limité aux carrés du premier degré et n'ait malheureusement pas poussé ses savantes investigations sur les nombreuses manifestations de la Diabolie dans les carrés de base N^{2+a}.

Pour la facilité des manipulations et des vérifications, les nombres sont écrits comme plus loin, non dans le système décimal, mais en base 3 et diminués d'une unité dans les abaques qui servent aux constructions.

Ainsi au lieu de	1	pour	1	en base décimale
	2		2	
	10		3	
	11		4	etc.,

l'auteur écrit :

0000	pour	1..................	2211	pour	77
0001	—	2..................	2212	—	78
0002	—	3..................	2220	—	79
0010	—	4..................	2221	—	80
0011	—	5..................	2222	—	81

Complétée, cette table servira pour les passages d'une base à l'autre si besoin est.

C'est la notation employée dans les abaques suivants.

DIABOLIQUE A GRILLE

Dans l'abaque α les nombres 000 111 222 sont répétés dans le sens vertical et on voit que la constante 9 se présente dans les dix-huit rangées, les dix-huit diagonales et tous les 81 compartiments, ce qui constitue le diabolique à grille.

L'abaque fondamental α est placé dans trois autres orientations β γ δ. La réunion des quatre abaques donnera donc forcément un Diabolique à grille.

α

201	201	201
201	201	201
201	201	201
012	012	012
012	012	012
012	012	012
120	120	120
120	120	120
120	120	120

β

111	222	000
000	111	222
222	000	111
111	222	000
000	111	222
222	000	111
111	222	000
000	111	222
222	000	111

γ

120	120	120
120	120	120
120	120	120
012	012	012
012	012	012
012	012	012
201	201	201
201	201	201
201	201	201

δ

222	000	111
000	111	222
111	222	000
222	000	111
000	111	222
111	222	000
222	000	111
000	111	222
111	222	000

Direction du Diabolique à grille, p. 11.
Premier nombre 0110 13.

Les abaques α β γ δ donnent pour premier nombre 2112 soit 69. En continuant on trouve la forme du Diabolique (p. 12) avec compartiment central : 19 49 79 11 41 71 3 33 63 et $\alpha = 2$ $\beta = 52$.

Le tableau des quatre abaques incliné d'un quart comme indiqué reproduit le Diabolique p. 11. L'unité des deux formes ne dépend donc que de l'orientation du tableau des abaques. Ceux-ci peuvent être pris dans l'ordre que l'on voudra et même utilisés dans diverses orientations.

SATANIQUE

Abaque α'. Les nombres 000 111 222 sont répétés dans le sens diagonal. On voit immédiatement la présence de la constante 9 dans les dix-huit rangées et les neuf compartiments fondamentaux, ce qui constitue le carré à compartiments, premier degré.

L'abaque fondamental α' est placé dans quatre orientations pour donner β' γ' δ'. La réunion des quatre abaques donnera

α'

012	201	120
201	120	012
120	012	201
201	120	012
120	012	201
012	201	120
120	012	201
012	201	120
201	120	012

β'

021	210	102
210	102	021
102	021	210
102	021	210
021	210	102
210	102	021
210	102	021
102	021	210
021	210	102

γ'

201	120	012
012	201	120
120	012	201
012	201	120
120	012	201
201	120	012
120	012	201
201	120	012
012	201	120

δ'

021	210	102
102	021	210
210	102	021
210	102	021
021	210	102
102	021	210
102	021	210
210	102	021
021	210	102

donc un carré à compartiments, mais des combinaisons sur la même horizontale du tableau général des huit abaques donneront des Sataniques. Exemples :

$\alpha\ \beta$	$\alpha'\ \beta'$
$\gamma\ \delta$	$\gamma'\ \delta'$
$\gamma'\ \delta'$	$\gamma\ \delta$
$\alpha'\ \beta'$	$\alpha\ \beta$
$\alpha'\ \alpha$	$\beta\ \beta'$
$\alpha'\ \beta$	$\beta'\ \alpha$

D'après ce qui précède, il est évident que tous les Diaboliques exposés se réduisent à une forme *unique* et que le Satanique n'en est qu'une transformation dérivant du changement de direction du point de départ 000 111 222. On voit alors clairement les liens intimes qui unissent les deux carrés et justifient leurs dénominations respectives ainsi que la raison qui fait souvent passer de l'un à l'autre.

On peut construire un certain nombre d'abaques analogues à l'abaque fondamental qui servira d'ailleurs de guide pour compléter les suivants dont voici les noyaux et l'indication des directions des groupes 000 111 222.

1 D	2 D	3 D	4 D
1 2 0 0	1 2 0 2	1 2 0 1	1 2 0 1
0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2
2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1
1	1	2	0

5 D'	6 D'	7 D'	8 D'
0 2 1 1	0 2 1 2	0 2 1 0	0 2 1 0
2 1 0	2 1 0	2 1 0	2 1 0
1 0 2	1 0 2	1 0 2	1 0 2
0	0	1	2

9 L	10 L	11 L'	12 L'
0 0 0 1	0 0 0 2	0 1 2 0	0 1 2 0
1 1 1	1 1 1	0 1 2	0 1 2
2 2 2	2 2 2	0 1 2	0 1 2
0	0	2	1

Les groupes 000 111 222 se trouvent ainsi placés non seulement dans les deux directions latérales L L' (hori-

zontale ou verticale), mais selon les deux directions diagonales D D'.

Dans ces abaques on reconnaît l'échange des Rectangles horizontaux ou verticaux extérieurs.

Le même compartiment est toujours répété soit dans le Rectangle horizontal ou dans le Rectangle vertical. Le Rectangle central — horizontal ou vertical — n'est que la répétition du noyau.

Ces abaques donnent la constante 9 dans les dix-huit rangées, les dix-huit diagonales et les quatre-vingt-un compartiments. Combinés quatre à quatre, ils donnent donc des Diaboliques à grille, soit avec des nombres répétés, soit avec les 81 premiers nombres consécutifs et il est facile de reconnaître pour ces derniers les combinaisons donnant des solutions exactes.

Diverses orientations et échanges possibles permettent de n'utiliser que les douze abaques indiqués ci-dessus. Ainsi les abaques 12 10 11 9 donnant une solution dont dépend le Diabolique p. 24. Celui-ci n'est autre que la forme dans laquelle on prendrait l'orientation de l'abaque 11 donnée par les horizontales prises dans l'ordre 9 8 7 6.....

On peut placer les neuf compartiments fondamentaux des Abaques dans l'ordre 147 258 369 excepté pour les abaques 9 10 11 12, ce qui rend possible la permutation des α et des β dans le carré total si ces abaques ne se présentent pas. Cette permutation n'est donc possible que dans les deux premiers des dix cas dont voici les éléments dans les carrés construits avec les 81 premiers nombres.

1er cas : DDDD' 8 solutions

Abaques 12345 1236 1237 1238 1245 1246 1247 1248

Exemple avec 1235

2002	0111	1220	1100	2212	0021	0201	1010	2122
1221	2000	0112	0022	1101	2210	2120	0202	1011
0110	1222	2001	2211	0020	1102	1012	2121	0200
2012	0121	1200	1110	2222	0001	0211	1020	2102
1201	2010	0122	0002	1111	2220	2100	0212	1021
0120	1202	2011	2221	0000	1112	1022	2101	0210
2022	0101	1210	1120	2202	0011	0221	1000	2112
1211	2020	0102	0012	1121	2200	2110	0222	1001
0100	1212	2021	2201	0010	1122	1002	2111	0220

2e Cas D D D' D' 10 solutions

Abaques 1257 1258 1267 1268 1278 1357 1368 1458 1467 2468

3e Cas D D D L 8 solutions

1239 12310 1249 12410 1349 13410 2349 23410

4e Cas D D D' L 34 solutions

1279 12710 1289 12810 1359 13510 13610 13710
1389 13810 1459 14510 14610 1479 14710 14810
2359 2369 23610 2379 2389 23810 2459 2469
24610 2479 24710 2489 34510 3469 3479 34710
3489 34810

5e Cas D D L L' 11 solutions

12911 12912 121011 121012 13911 13912 14911
14912 141011 24911 241011

6e Cas D D L L 5 solutions

13910 14910 23910 24910 34910

7e Cas D D' L L 6 solutions

17910 18910 27910 28910 37910 48910

8e Cas D D' L L' 16 solutions
(9 compartiments Sataniques)

15911 15912 161011 161012 17911 17912 171012 18911
18912 181011 181012 26911 26912 28911 28912 281012

9e Cas D D L L' 6 solutions

191011 191012 291011 291012 391011 491012

10e Cas L L L' L' 1 solution

9 10 11 12

Ces 105 solutions géométriques ou primordiales donnent en tout 40320 solutions arithmétiques, c'est-à-dire d'aspect différent pour un spectateur immobile. Dans toutes ces solutions, les nombres occupant des cases symétriques par rapport au centre sont complémentaires à 82 et sans tenir compte de cette condition le nombre des solutions du Diabolique à grille s'élève à 12,037,248.

De nombreux exemples des carrés, ici rapidement esquissés, ont été publiés dans divers journaux, les *Tablettes du Chercheur*, l'*Illustration*, etc.

ALGER. — TYPOGRAPHIE ADOLPHE JOURDAN. — ALGER.